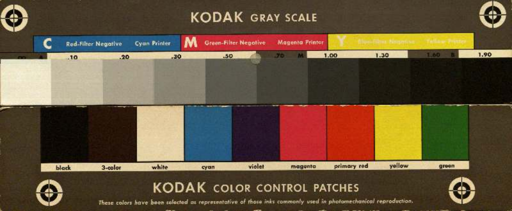
KODAK GRAY SCALE
C
Red-Filter Negative
Cyan Printer
M
Green-Filter Negative
Magenta Printer
Y
Blue-Filter Negative
Yellow Printer
.00
A
.10
.20
.30
.50
.70
M
1.00
1.30
1.60
B
1.90
black
3-color
white
cyan
violet
magenta
primary red
yellow
green
KODAK COLOR CONTROL PATCHES
These colors have been selected as representative of those inks commonly used in photomechanical reproduction.

J. C. L. Hellwig.

Anfangsgründe
der
allgemeinen
Mathematik.

~~V. A. 57.~~

~~(A. Conington.)~~

Anfangsgründe

der

allgemeinen

Mathematik

zum

Gebrauch seiner Zuhörer

von

D. Johann Christian Ludewig Hellwig,

Herzoglich Braunschweigischen Pagenhofmeister, Profeßor der Mathematik und der Naturgeschichte an dem Catharinen Gymnasium; Mitglied der Gesellschaft der Wißenschaften zu Frankfurth a. d. Oder, und der Naturforschenden Gesellschaft zu Berlin, Göttingen, Halle, Jena, und Waltershausen.

Braunschweig, 1798.

Diese Anfangsgründe der allgemeinen Mathematik sind ein Theil meines im Jahr 1777. heraus gegebenen Arithmetischen Lehrbuchs, und erscheinen hier besonders abgedrukt. Machen die Lokalumstände, unter welchen sich die Lehrer der Mathematik an dem hiesigen Catharinen Gymnasium befinden, diesen besondern Abdruck nicht durchaus nothwendig so erhalten doch sowohl Lehrer als Zuhörer durch ihn manche Bequemlichkeit. Das Werkchen erscheint übrigens sehr verändert, und wie ich hoffen darf, verbeßert.

Der Verfaßer.

Braunschweig
im Marz 1798.

Vorbericht.

§. 1.

1. Erklärung. Verschiedene Dinge heißen Dinge von einerlei Art, in so weit man mit ihnen einen gemeinschaftlichen Begriff verknüpft.
2. Erklär: Werden Dinge von einerlei Art zusammen gefaßt, so hat man eine Anzahl solcher Dinge.
3. Erklär: Man legt einem Gegenstande eine Größe bey, in so ferne man in ihm eine Anzahl wahrnimmt.
4. Erklär: Die verschiedenen Dinge von einerlei Art, welche die Größe machen, heißen Theile der Größe.
5. Erklär: Der Theil der Größe, welcher in ihr zu erst angenommen wird, und deßen man sich gemeiniglich bedient, die Größe dadurch näher zu bestimmen, heißt die Einheit der Größe.
6. Erklär: Wenn die Einheit einer Größe keine besondere Benennung hat, so heißt die Größe eine Zahl und das besondere Zeichen derselben eine Ziffer. Im weitläuftigen Verstande rechnet man nicht allein diese nicht weiter benannte Einheit, sondern selbst deren Theile, die Hälfte und zwey Drittheile derselben ꝛc zu den Zahlen.

§. 2.

Anmerk: Die durch die Ziffer 6 bezeichnete Größe ist eine Zahl, da ihre Einheit keine andere Benennung, als 1 hat. Hingegen sind 6 Pferde keine bloße Zahl, da die Einheit ein Pferd heißt.

§. 3.

Erklär: Wir haben die Größe eines Gegenstandes gefunden, wenn wir die Anzahl der Einheiten, welche in der Größe deßelben enthalten, bestimmt haben.

Diese bestimmte Anzahl der Einheiten macht entweder die ganze Größe, welche wir haben finden wollen: In diesem Fall wird gesagt, daß man die Größe genau gefunden; oder sie macht nur einen Theil dieser Größe. In diesem Fall ist zwischen der Größe die wir gefunden haben, und derjenigen die wir haben finden wollen, ein Unterschied. Dieser Unterschied ist entweder so klein, daß er in Ansehung der ganzen Größe keine Betrachtung verdient. In diesem Fall hat man die Größe beynahe gefunden; oder es ist der Unterschied nicht so klein, daß er keine Betrachtung verdient. In diesem Fall kann man nicht sagen, daß man die Größe bestimmt habe.

§. 4.

Zusatz. Sollen wir eine Größe bestimmen, die sich nicht genau bestimmen läßt, so müßen wir solche beynahe zu bestimmen suchen.

§. 5.

Anmerk: Wie klein der Unterschied zwischen der gefundenen und der wahren Größe seyn muß, wenn man sagen will, daß sie beynahe bestimmt sey, läßt sich nicht algemein angeben, es wird solches vielmehr nach den Umständen bestimmt.

§. 6.

Erklär: Die Wißenschaft von Erfindung der Größen (§. 3.) heißt die Mathematik. Man theilt sie ein: in die reine oder theoretische und in die angewandte oder praktische Mathematik. Jene beschäftigt sich mit Erfindung der Größen für sich, diese aber mit Erfindung der Größen, in so fern sie in andern Gegenständen enthalten sind.

§. 7.

Anmerk: Die theoretische Mathematik wird von den Mathematikern verschiedentlich eingetheilt. Ich will hier denen folgen, die drey Theile derselben annehmen: die allgemeine Mathematik, die Arithmetik, und die Geometrie. Der Grund dieser Eintheilung liegt in dem, daß man die Größe entweder als eine Menge von Theilen überhaupt ansehen kann, oder daß man zugleich auf die Verbindung und Ordnung ihrer Theile Rücksicht nimmt. In jenem Fall gehört sie in die Arithmetik und in diesem in die Geometrie. Sondert man aber aus diesen beyden Theilen diejenigen allgemeinen Warheiten ab, welche jenen beiden Theilen zum Grunde dienen können, so entsteht aus der Sammlung dieser allgemeinen Warheiten der Theil, der schon von verschiedenen Lehrern die Allgemeine Mathematik genennt ist.

§. 8.

1. Anmerk: Die Arithmetik und Geometrie sind indeßen nicht sowohl in Ansehung der Verschiedenheit der Größe, mit welcher sie sich beschäftigen, als vielmehr in Ansehung der Art und Weise die Größe zu finden, von ein ander verschieden; dis kann in den Vorlesungen weiter aus einander gesetzt werden.

2. Anmerk: Daß man bey einem systematischen Vortrage mit der allgemeinen Mathematik den Anfang machen müße, erhellet aus dem von ihr im §. 7. gegebenen Begriff. Man wird wohl thun, ihr die Arithmetik und dann die Geometrie folgen zu laßen. Umstände können indeßen eine Abweichung von dieser Ordnung unter gewißen Modifikationen entschuldigen.

3. Anmerk: In den Vorlesungen können noch andere Eintheilungen der Mathematiker angegeben, und geprüft, auch kann etwas von den Theilen der angewandten Mathematik beygebracht werden.

Allgemeine Mathematik

das erste Kapittel.

Allgemeine Begriffe von Gleichheit und Ungleichheit der Größen.

§. 1.

Erklär: Von einigen Dingen z. B. von zweyen die wir A und B nennen wollen, kann das eine in die Stelle des andern gesetzt werden, ohne daß dadurch eine Veränderung entsteht: dann nennt man die Dinge einerley. Dis sind sie entweder in Ansehung ihrer Größe (§. 1. n. 3. Vorb.) oder in Ansehung

 ihrer

ihrer Eigenschaften, die von der Grösse verschieden sind. Im ersten Fall heissen die Dinge gleich, im andern ähnlich. Man sieht hieraus leicht, wann die Dinge verschieden, wann sie anähnlich oder ungleich. Wenn dis letztere, so ist ein Theil von A so groß als ganz B, oder A ist ganz genommen so groß als ein Theil von B. Im erstem Fall ist A grösser und im andern Fall kleiner als B. In diesem Fall kan A etliche mal genommen der ganzen Grösse B gleich werden, oder dis ist nicht der Fall. Ist dis, so ist A ein aliquanter und ist jenes, so ist A ein aliquoter Theil von B.

§. 2.

Zusatz. Sollen zwey ungleiche Grössen gleich werden, so muß entweder zu der kleinern etwas hinzugelegt, oder von der grössern etwas weggenommen werden.

§. 3.

Anmerk: Das Zeichen der Aenlichkeit ist $\backsim$
Das Zeichen der Gleichheit $=$
Das Zeichen der Ungleichheit $<>$

Die Art sich ihrer zu bedienen sollen Beyspiele begreiflich machen. $A \backsim B$ heißt A und B sind ähnlich
$A = B$ = A und B = gleich
$A <> B$ = A und B = ungleich
$A > B$ = A ist grösser als B
$A < B$ = A = kleiner = B

§. 4.

Grundsätze Es sey A das Ganze.
b, c und d alle Theile deßelben, $+$ das Zeichen der Verknüpfung; so ist.

1.) $A = A$. 2.) $A \backsim A$. 3.) $A \cong A$
4.) $b + c + d = A$
5.) $b <> A$ und $b + c <> A$
6.) $A > b$; $A > c$ $A > d$
7.) $A > b + c$; $A > b + d$ $A > c + d$
8.) $b < A$; $c < A$; $d < A$
9.) $b + c < A$; $b + d < A$; $d + c < A$
10.) Es ist $A = B$, oder $> B$, oder $< B$, Finden zwey dieser Fälle nicht statt, so findet sich der dritte.

Diese

Diese durch algemeine Zeichen ausgedrückte Wahrheiten, sollen in den Vorlesungen durch Worte ausgedrückt werden.

§. 5.

Erklär: Der Ausdruck, worin verschiedene Größen in Verbindung mit dem Zeichen der Gleichheit sind, heißt eine Gleichung, deren Seiten diejenigen Oerter sind, welche das Zeichen der Gleichheit von einander trennt. So ist z.B. der Ausdruk $A = B$ eine Gleichung, und es steht A an der einen und B an der andern Seite der Gleichung. Jene Seite heißt auch die erste und diese die andre Seite der Gleichung.

§. 6.

Lehrsatz. Wenn $A = B$ und
$C = B$
so ist $A = C$.

Beweis. Vermöge der Bedingung kann für B in die erstere Gleichung gesetzt werden C, ohne daß in Ansehung der Größe eine Veränderung geschieht. (§. 1.) daher ist $A = C$ d. i. Wenn von zweien Größen jede so groß als eine dritte, so sind jene Größen gleich.

§. 7.

1. Zusatz. Wenn $M > A$
und $A = B$
so ist $M > B$

2. Zusatz. Wenn $M < A$
und $A = B$
so ist $M < B$

d. i. Was größer oder kleiner ist, als eine von zweyen gleichen Größen, das ist ꝛc ꝛc.

§. 8.

Lehrsatz. Wenn $A > B$
und $B > C$
so ist $A > C$

Beweis

Beweis. Wenn $A > B$ so sey $A = B + m)$ §. 2
und wenn $B > C$ = = $B = C + n)$
setzt man nun in die erste Gleichung $C + n$ statt B. (§. 1.)
so ist $A = C + n + m$ und dann
ist $A > C$ §. 4. n. 6.
das heißt: Wenn eine Größe ꝛc.

§. 9.

Zusatz. Wenn daher $A < B$
und $B < C$
so ist auch $A < C$

Das zweite Kapittel.

Allgemeine Begriffe von den Rechnungsarten.

I. Vom Addiren

§. 10.

Erklärung. Addiren heißt, aus einigen Größen eine andere finden, welche den gegebenen zusammen genommen gleich ist.

Beym Addiren kommen daher folgende Größen vor.
1. Die summirenden Größen, oder die gegebenen, welche zusammengenommen einer andern gleich werden sollen,
2. Die Summe oder diejenige Größe, welche dadurch entstanden, daß man die summirenden Größen zusammengenommen.

§ 11.

Anmerk. Das Zeichen wodurch angezeigt wird, daß Größen zu addiren, ist das §. 4. angezeigte Zeichen der Verknüpfung + und wird plus ausgesprochen. Sollen daher A, B und C addirt werden; so schreibt man $A + B + C$. Setzt man diese $= M$ so so können diese Größe, als die Summe, jene Größen aber als die summirenden Größen angesehn werden.

§. 12.

Zusatz. Größen, die man addiren soll, müßen von einerlei Art seyn (§. 1. Vor:). Die von verschiedener Art laßen sich nur durch das Zeichen der Addition mit einander verbinden.

§. 13

Lehrsatz. Wenn $A = B$ und
$C = D$

So ist $A + C = B + D$

Beweis. Es ist $A + C = A + C$ (§. 4. n. 1.)
da nun $A = B$. V. d. Bed.

So ist $A + C = B + C$ (§. 1.) und
da ferner $C = D$ V. d. Bed.

So ist $A + C = B + D$

Das ist: Gleiche Größen zu gleichen addirt geben gleiche Summen.

§. 14.

Lehrsatz. Wenn $A > B$
und $C = D$

So ist $A + C > B + D$

Beweis. Da $A > B$ V. d. Bed.
so sey $A = B + m$ (§. 2.)
da nun auch $C = D$. V. d. Bed.

So ist $A + C = B + m + D$ (§. 13.)
Nun ist aber $B + m + D > B + D$ (§. 4. n. 7)
Folglich auch $A + C > B + D$ (§. 7.)

Das ist: Wenn zu ungleichen Größen, von welchen die erste größer ist als die andere, gleiche Größen addirt werden, so ist auch rc.

§. 15.

§. 15.

Zusatz. Wenn $A < B$
und $C = D$
So ist auch $A + C < B + D$

§. 16.

Lehrsatz. Wenn $A > B$
und $E > C$

So ist auch $A + E > B + C$

Beweis Da $E > C$. V. d. Bed.
so sey $E = C + m$ (§. 2.)
da nun auch $A > B$. V. d. Bed.

So ist $A + E > B + C + m$ (§. 14.)
und da $B + C + m > B + C$. (§. 4. n. 7.)
So ist auch $A + E > B + C$. (§. 8.)

§. 17.

Zusatz. Wenn $A < B$
und $E < C$
So ist auch $A + E < B + C$.

§. 18.

Lehrsatz. Wenn $A > B$ und es
soll $A + E = B + C$ werden;
So muß $E < C$ seyn.

Beweis. Wäre unter der angenommenen Bedingung
E nicht $< C$ so ist entweder
$E = C$ oder
$E > C$ Man nehme daher
an, daß $E = C$ sey. Da nun
V. d. Bed. $A > B$ so ist
$A + E > B + C$ (§. 14.) welches der Bedingung widerspricht, daher nicht
$E = C$ seyn kann.

Man nehme ferner an, daß
$E > C$ sey. Da nun
$A > B$ V. d. Bed.
so ist auch $A + E > B + C$ (§. 16.) welches der Bedingung gleichfals widerspricht. Daher kann auch nicht
$E > C$ seyn, folglich muß
$E < C$ seyn. (§. 4. n. 10.)

§. 19.

Zusatz. Wenn $A < B$ und
$A + E = B + C$; so muß
$E > C$ seyn.

II. Vom Subtrahiren.

§. 20.

Erklär: Wenn zu B addirt werden muß C, damit A entstehe, so heißt C der **Unterschied**, die **Differenz** von A und B. Es ist also

$$B + C = A.$$

Nimt man von A, oder welches einerlei ist, von $B + C$ weg B, so entsteht die Differenz C. Daher heißt die Rechnungsart, wodurch man die Differenz zweier Größen sucht, die Subtraktion. Die Differenz von A und B entsteht daher entweder, wenn man untersucht, was übrig bleibt, wenn man B von A wegnimmt, oder wenn man eine Größe C sucht, die, zu B addirt, der Größe A gleich wird. Außer der Differenz kommen daher bey der Subtraktion noch folgende Größen vor.

1, Die zu verringernde Größe, das ist die gegebene Größe A von der eine andere B abgesondert werden soll.
2, Die subtrahirende Größe die gegebene Größe B welche von der zu verringernden Größe A abzusondern.

§. 21.

Anmerk: Das Zeichen der Subtraktion ist —. Man spricht es weniger (minus) aus und schreibt es zwischen die zu verringernde

ringernde und die subtrahirende Größe, so daß die erstere vor und die andere nach dem Zeichen zu stehen kömmt. So zeigt Z. B. A—B an, daß B von A abgezogen werden soll, oder, welches einerlei ist, die Differenz oder den Unterschied von A und B. Setzt man A—B=C; so hat man alle bey der Subtraktion vorkommenden Größen in einer Gleichung.

§. 22.

1. Zusatz. Die Theile der Größen, welche von einander zu subtrahiren, müßen von einerlei Art seyn. Im entgegengesetzten Fall kann die Subtraktion nur durch Zeichen angezeigt werden. Hieraus erhellt, wie Größen überhaupt von einander zu subtrahiren und daß man durchs Subtrahiren bestimmen wolle, um wieviel eine der Größen größer, als die andere sey.

2. Es ist $x - a + a = x$ und
$x + a - a = x$

3. Was also die Subtraktion von einer Größe trennt, das ꝛc und was durch die Addition mit einer Größe verbunden wird, das ꝛc.

4. Es ist einerlei, ob ich zu erst zu einer Größe etwas addire ꝛc.

5. Wenn die zu verringernde und die subtrahirende Größen einander gleich, so ist der Unterschied nichts, wovon o das Zeichen ist, daher $a - a = o$

§. 23.

Lehrsatz Wenn $A = B$
und $C = D$

So ist $A - C = B - D$

Beweis. Es ist $A - C = A - C$ (§. 4. n. 1.)
da nun $A = B$ V. d. Bed.

So ist $A - C = B - C$ (§. 1.) da
man auch $C = D$. V. d. Bed.

So ist auch $A - C = B - D$ (§. 1.)

§. 24.

§. 24.

Lehrsatz. Wenn $x - a = b$.
So ist $x = b + a$.

Beweis. Da $x - a = b$ V. d. Bed.
und $a = a$.

So ist $x - a + a = b + a$ (§. 13.)
da nun $x - a + a = x$ (§. 18. n. 2.)

So ist $x = b + a$ (§. 6.)

§. 25.

Lehrsatz. Wenn $x + a = b$
So ist $x = b - a$.

Beweis. Da $x + a = b$. V. d. Bed.
und $a = a$

So ist $x + a - a = b - a$ (§. 23.)
da nun $x + a - a = x$ (§. 22. n. 2.)

So ist $x = b - a$ (§. 6.)

§. 26.

Zusatz. Wenn $B - A = H - G$
So ist $A - B = G - H$ (§. 24. 25.)

§. 27.

Lehrsatz. Wenn $A > B$
und $C = D$

So ist $A - C > B - D$

Beweis. Da $A > B$. V. d. Beding.
so sey $A = B + m$ (§. 2.)
da nun auch $C = D$. V. d. Bed.

So ist auch $A - C = B + m - D$ (§. 23.) Nun ist aber $B + m - D > B - D$ (§. 4. n. 7.) Folglich auch $A - C > B - D$.

§. 28.

Zusatz. Wenn $A < B$
auch $C = D$; so ist auch
$A - C < B - D$

§. 29.

Lehrsatz. Wenn $A = B$.
und $C > D$.

So ist $A - C < B - D$.

Beweis, Da $A = B$ V. d. Beding.
und $C > D$ V. d. Beding.
so sey $C = D + m$ (§. 2.)
daher ist $A - C = B - D - m$ (§. 23.)
und $A - C + m = B - D$ §. 24.
Nun ist aber $A - C < A - C + m$ (§. 7. n. 4.)
Folgl: auch $A - C < B - D$ (§ 7. n. 2.)

§. 30.

Zusatz. Wenn also $A = B$
und $C < D$
so ist $A - C > B - D$

III. Vom Multipliciren.

§. 31.

Erklärung. Multipliciren heißt eine Größe so oft nehmen als es durch eine andere bestimmt wird.

Beym Multipliciren kommen daher folgende Größen vor.

1. Das Multiplicand, die Größe welche etliche mal genommen werden soll.
2. Der Multiplikator, die Größe welche anzeigt, wie oft das Multiplikand genommen werden soll.
3. Das Produkt oder Faktum, die Größe welche dadurch entstanden, indem das Multiplikand so oft genommen worden, als

als es der Multiplikator anzeigt.

§. 32.

Erklärung. Das Multiplikand und der Multiplikator heißen auch noch mit einer gemeinschaftlichen Benennung des Produkts Faktoren; daher heißt: ein Produkt in seine Faktoren zerstreuen, die Faktoren angeben, durch deren Multiplikation in einander das Produkt entstehn konnte.

§. 33.

1. Anmerkung. Die Zeichen, wodurch die Multiplikation angezeigt wird, sind . oder $\times$ die man zwischen die Faktoren setzt. Auch schreibt man die Faktoren ohne Zeichen neben einander, wenn man nur dadurch keine Zweideutigkeit verursacht. So heißt z. B. $A.B$ oder $A \times B$ oder $A\,B$ ein Produkt aus A durch B. Setzt man $A\,B = C$ so hat man die bey der Multiplikation vorkommende Größen in einer Gleichung.

2. Werden drey Faktoren gegeben um ein Produkt derselben zu finden, so wird das Produkt zweyer durch den dritten multiplicirt u. s. f.

§. 34.

Zusatz. 1. Das Multiplikand ist so vielmal im Produkt enthalten, als die Einheit im Multiplikator. Daher sind auch das Multiplikand und das Produkt Größen von einerlei Art.

2. Wenn A das Multiplikand und B der Multiplikator, so ist das Produkt $A\,B$ eine Summe, die aus B summirenden Größen entstanden, deren jede A hieß. Daher kann der Multiplikator nur eine Zahl seyn. (§. 6. Vorb.)

3. Wenn eine Größe a durch 1 multiplicirt wird; so ist das Produkt $=$ jener Größe oder $a \times 1 = a = 1\,a$.

4. Es ist Nichts durch eine Zahl multiplicirt oder $0 \times a = 0$

5. Wenn man eine Reihe Punkte etliche mal unter einander

schreibt

schreibt; so kann dieses zur Erläuterung der Multiplikation dienen. Denn in dieser Figur

A . . . . B

. . . .

C . . . . D

kann die Summe der Punkte in der Reihe AB das Multiplikand, die Summe der Punkte in der Reihe AC den Multiplikator, und die Summe aller Punkte in ABCD das Produkt vorstellen, weil die Reihe AB so oft genommen werden muß, als die Reihe AC einzelne Punkte in sich enthält, wenn alle diese Punkte entstehn sollen. Es entsteht aber auch eben diese Anzahl Punkte in ABCD und folglich das vorige Produkt, wenn die Summe der Punkte in der Reihe AC so oft genommen wird, als in der Reihe AB einzelne Punkte enthalten. Daraus folgt.

6. Daß es einerlei sey, welchen von den beyden Faktoren eines Produkts, man als das Multiplikand, oder als den Multiplikator ansehen wolle, wenn übrigens die besondere Eigenschaft der Faktoren solches erlaubt. Auch erleichtert diese Zeichnung unter der oben angeführten Bedingung die Einsicht der Wahrheit, daß

7. Die Einheit so oft in dem einem Faktor enthalten, als der andere Faktor im Produkt, und daß AC in ABCD enthalten AB mal, und AB in ABCD enthalten AC mal. Bezeichnen wir nun das Produkt durch P und die beyden Faktoren durch f und m; so ist f in P enthalten m mal, und m in P enthalten f mal. Wo also drey Größen befindlich, die von einander wie f, m und P abhängen, da haben wir die bey der Multiplikation vorkommenden Größen.

§. 35.

Lehrsatz. Wenn A = B
und C = D

So ist AC = BD

Beweis. Dieser kann nach §. 13 und 23 geführt werden

§. 36

§. 36.

Lehrsatz. Es ist $(A+B)\times 2 = 2A+2B$.

Beweis Es sey $A+B=S$
daher auch $(A+B)\times 2 = S\times 2 = 2S$ §. 35.
Nun ist aber auch $A+B+A+B = S+S = 2S$ §. 3.
Folglich auch $(A+B)\times 2 = A+B+A+B = 2A+2B$.

§. 37.

1. Zusatz. Es ist $(A+B)\times 3 = 3A+3B$ u. s. f.
Folglich $(A+B)\times c = Ac+Bc$
Man multiplicirt daher eine Summe durch eine Größe, wenn man rc.
2. Es ist $(A+1)c = Ac+c$

§. 38.

Lehrsatz, Es ist $(A-B)\times c = Ac - Bc$

Beweis. Es sey $A-B=D$ so ist
$(A-B)c = Dc$ (§. 35.)
da nun auch $A = D+B$ (§. 24.)
So ist auch $Ac = (D+B)c$ (§. 35.)
und da $(D+B)c = Dc+Bc$ (§. 37.)
so ist auch $Ac = Dc+Bc$
Folglich $Ac - Bc = Dc$. (§. 25.) da nun vorher
$(A-B)c = Dc$; so ist auch
$(A-B)c = Ac - Bc$

§. 39.

1. Zusatz. Man multiplicirt daher eine Differenz durch eine Größe, wenn man rc.
2. Es ist $(A+B-D)c = Ac+Bc-Dc$. (§. 37. 38.)
3. Es ist $(A-1)c = Ac - c$

§. 40.

Lehrsatz. Wenn $A > B$
und $C = D$

So ist $\overline{AC > BD}$

Beweis. Wenn $A > B$ V. d. Bed.
so sey $A = B + m$ (2.) da nun
$C = D$. V. d. Bed.
so ist auch $AC = (B + m) D = BD + mD$. §. 37.
Nun ist aber $BD + mD > BD$
Folglich auch $AC > BD$.

§. 41.

Zusatz. Wenn $A < B$
und $C = D$
So ist auch $AC < BD$.

§. 42.

Lehrsatz. Wenn $A > B$
und $C > D$

So ist $\overline{AC > BD}$

Beweis, Da $A > B$ V. d. Bed.
und $C > D$ V. d. Bed.
so sey $C = D + m$
Daher ist $AC > (D + m) B$ §. 40.
Nun ist $(D + m) B = BD + Bm$ §. 37.
Folglich $AC > BD + Bm$
Und $AC > BD$.

§. 43.

Zusatz, Wenn $A < B$
und $C < D$
so ist $AC < BD$

§. 44.

§. 44.

Lehrsatz. Wenn $A > B$ und es
soll $AE = BC$ werden
so muß $E < C$ seyn.

Beweis. Dieser kann mit gehöriger Veränderung so geführt werden, wie der im §. 18.

§. 45.

Zusatz. Wenn $A < B$ und es
soll $AE = BC$ werden
so muß $E > C$ seyn.

IV. Vom Dividiren.

§. 46.

Erklär: Diese Rechnungsart beschäftigt sich mit dem Theilen und Meßen.

Eine Größe D theilen, heißt: sie in so viele gleiche Theile zerlegen, als durch eine andere d bestimmt wird, und dabey ausmitteln, wie groß einer dieser gleichen Theile q sey. Daher kommen beym Dividiren folgende Größen vor:

1. Die Größe D welche getheilt wird, oder das Dividend.
2. Die Größe d durch welche bestimmt wird, in wieviele gleiche Theile das Dividend zu zerlegen, oder der Divisor
3. Der Theil q welcher durch die Theilung entstand, oder der Quotient.

§. 47.

Zusatz. Es ist $q \times d = D$, daher kann der Divisor nur eine Zahl seyn. (§. 6. Vorb.) Auch müßen das Dividend und der Quotient Größen von einerlei Art seyn.

§. 48.

Erklärung. Eine Größe M meßen, heißt: untersuchen, wie oft eine andere m in ihr enthalten sey. Beym Meßen kommen daher folgende Größen vor.

1. Die zu meßende Größe M heißt auch das Dividend.

2. Die Größe m, von der untersucht werden soll, wie oft sie in der zu meßenden Größe M enthalten sey; der Divisor, oder das Maaß.

3. Die Größe, welche bestimt, wie oft das Maaß m in der zu meßenden Größe M enthalten sey: der Quotient. Er mag durch n ausgedrükt werden.

§. 49.

Zusatz. Es ist $m \times n = M$. Daher kann beym Meßen der Quotient n nur eine Zahl seyn (§. 6. Vorb.). Auch müßen die zu meßende Größe M und das Maaß m, Größen von einerlei Art seyn, weil sonst unmöglich dieses in jener enthalten seyn kann.

§. 50.

Anmerk. $A : B$ oder $\frac{A}{B}$ sind Bezeichnungen fürs Meßen und Theilen. In beiden Fällen ist A das Dividend, B der Divisor und der ganze Ausdruk der Quotient. Daher $D : d = q$ §. 46. und $M : m = n$ §. 48. oder auch $\frac{D}{d} = q$ und $\frac{M}{m} = n$.

§. 51.

1. Zusatz. Da $qd = D$ §. 47.
$mn = M$ §. 49.
$mf = P$ §. 34. n. 7.

So sind die bey der Division vorkommende Größen, anzusehen, als solche, die sich bey der Multiplikation vorfinden. Es ist nemlich das Dividend ein Produkt, aus dem Divisor

visor in den Quotienten, als Faktoren. Eben so sind die bey der Multiplikation vorkommende Größen anzusehen, als solche, die sich bey der Division befinden. Das Produkt ist ein Dividend, und des Produkts Faktoren sind Quotient und Divisor.

2. Zusatz. Wenn also $P = mf$, so ist

$$P : m = f \quad \text{und}$$
$$P : f = m$$

Theilt oder mißt man daher das Produkt durch einen Faktor, so ist der andere Faktor der Quotient. Was daher die Multiplikation zusammengesetzt, das trennt die Division.

3. Zusatz. Es ist $ax : a = x$

$$abcde : a = bcde$$
$$abcde : ac = bde \text{ u. s. f.}$$

4. Zusatz. Wenn $x : a = b$ so ist

$$x = ba$$

5. Zusatz. Es ist $(x : a) \times a = x$

6. Zusatz. Multiplikation und Division dienen sich wechselseitig zur Probe, ob richtig multiplicirt und dividirt sey. Denn wenn man das Produkt durch den einen Faktor richtig theilt oder mißt, und es entstehet dann der andere Faktor, so ist das Produkt richtig; multiplicirt man den Quotienten durch den Divisor richtig, und es entstehet das Dividend, so ist der Quotient richtig.

7. Zusatz. Da $o = a \times o$ §. 34. n, 4. so ist

$$\frac{o}{a} = o \quad \text{und}$$
$$\frac{o}{o} = a$$

8. Zusatz. Es ist $a : a = 1a : a = 1$

§ 52.

Lehrsatz. Wenn $a : x = b$
so ist $x = a : b$

Beweis. Wenn $a : x = b$ so ist
$a = bx$ (§. 51. n. 4.)
und $a : b = x$ (§. 51. n. 2.)

§. 53.

1. Zusatz. Der Divisor entsteht daher, wenn man das Dividend durch den Quotienten theilt oder mißt.

2. Zusatz. Daher dient auch die Division der Division zur Probe. Denn wenn man das Dividend durch den Quotienten theilt oder mißt, und es entsteht der Divisor, so ist richtig getheilt oder gemeßen worden.

§. 54.

Lehrsatz. Wenn $A = B$ und
$C = D$

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$$

Beweis. Dieser kann nach §. 13 und 23 geführt werden.

§. 55.

Lehrsatz. Wenn $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$
und $C = D$

So ist $A = B$

Beweis. Wenn $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$
und $C = D$

so

so ist $\frac{A}{C} \times C = \frac{B}{D} \times D$

Nun ist $\frac{A}{C} \times C = A$ (§. 51. Zus. 5.)

Folglich $A = \frac{B}{D} \times D$

Es ist aber auch $\frac{B}{D} \times D = B$ §. 51. Zus. 5.

Folglich $A = B$

Das ist: wenn gleiche Quotienten gleiche Divisoren haben, so sind auch 2c.

§. 56.

Lehrsatz. Es ist $\frac{B+m}{D} = \frac{B}{D} + \frac{m}{D}$

Beweis. Es sey $\frac{B}{D} = x$ und $\frac{m}{D} = y$ so ist

1. $B = xD$ und $m = yD$. (§. 51. Zus. 4.)

2. $\frac{B}{D} + \frac{m}{D} = x + y$ (13.) da nun

$B + m = xD + yD$. n. 1.

und $(x+y)D = xD + yD$. §. 37.

so ist $B + m = (x+y)D$. folglich

$\frac{B+m}{D} = x + y$ (§. 51. Zus. 2.)

da nun $\frac{B}{D} + \frac{m}{D} = x + y$ n. 2.

so ist auch $\frac{B+m}{D} = \frac{B}{D} + \frac{m}{D}$

§. 57.

Zusatz. Es ist $\frac{B-m}{D} = \frac{B}{D} - \frac{m}{D}$

§. 58.

Lehrsatz. Wenn $A > B$ und

$$\frac{C = D}{}$$

so ist $\frac{A}{C} > \frac{B}{D}$

Beweis. Da $A > B$ so sey $A = B + m$ §. 2.

da nun auch $C = D$ so ist

$\frac{A}{C} = \frac{B+m}{D}$ §. 54.

Nun ist aber $\frac{B+m}{D} = \frac{B}{D} + \frac{m}{D}$ §. 56.

daher auch $\frac{A}{C} = \frac{B}{D} + \frac{m}{D}$

folglich $\frac{A}{C} > \frac{B}{D}$

§. 59.

Zusatz: Wenn also $A < B$ und

$C = D$

so ist auch $\frac{A}{C} < \frac{B}{D}$

§. 60.

Lehrsatz. Es ist $\frac{B}{D} \times C = \frac{BC}{D}$

Beweis. Es sey $\frac{B}{D} = x$

so ist $\frac{B}{D} \times C = Cx$ (§. 35.)

auch $B = Dx$

und $BC = CDx$

folglich $\frac{BC}{D} = Cx$ §. 54.

Also auch $\frac{B}{D} \times C = \frac{BC}{D}$

§. 60. a.

Zusatz. Es ist $\frac{BC}{D} = \frac{B}{D} \times C = \frac{C}{D} \times B$

§. 61.

Lehrsatz. Wenn $A = B$

und $C > D$

so ist $\frac{A}{C} < \frac{B}{D}$

Beweis. Da $C > D$ so sey $C = D + m$ (§. 2.)

da nun auch $A = B$ so ist

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{D + m} \text{ (§. 54.)}$$

Folglich $\frac{A}{C} \times (D + m) = B$ Nun ist

$$\frac{A}{C} \times (D + m) = \frac{A \times (D + m)}{C} \text{ §. 60}$$

da nun $\frac{A \times (D + m)}{C} = \frac{AD + Am}{C}$ §. 37

und

und $\frac{AD + Am}{C} = \frac{AD}{C} + \frac{Am}{C}$ §. 56.

so ist auch $\frac{AD}{C} + \frac{Am}{C} = B$

Also $\frac{AD}{C} < B$

da nun $\frac{AD}{C} = \frac{A}{C} \times D$ so ist

auch $\frac{A}{C} \times D < B$

folglich $\frac{A}{C} < \frac{B}{D}$ §. 59

§. 62.

1. Zusatz. Wenn also $A = B$
$C < D$
so ist $\frac{A}{C} > \frac{B}{D}$

2. Zusatz. Wenn $A = A$
und $B > A$
so ist $\frac{A}{B} < 1$. §. 51 n. 8.

3. Zusatz. Wenn $A = A$
und $B < A$
so ist $\frac{A}{B} > 1$. §. 51. n. 8.

4. Zusatz. Beym Theilen, wo das Dividend zu den Arten der Dinge gehört, die a heißen die Z mal vorhanden und durch d zu Theilen, sind,

ist

$$\frac{Za}{d} = a \text{ wenn } d = Z$$

$$\frac{Za}{d} < a \text{ wenn } d > Z$$

$$\frac{Za}{d} > a \text{ wenn } d < Z$$

5. Zusatz. Im andern Falle des vorigen Zusatzes, wenn $\frac{Za}{d} < a$, gehöre a zu denjenigen Größen, die aus n solchen Größen bestehen, wovon jede b heißt. So ist $a = nb$,

und $\frac{Za}{d} = \frac{Znb}{d} = b$ wenn $d = Zn$

$\frac{Za}{d} = \frac{Znb}{d} < b$ wenn $d > Zn$ und

$\frac{Za}{d} = \frac{Znb}{d} > b$ wenn $d < Zn$

Auch hier kann der zweite Fall noch weiter zergliedert werden.

6. Zusatz. Im dritten Falle des 4. Zusatzes wenn $\frac{Za}{d} > a$, ist $\frac{Za}{d} = na$ wenn d von Z ein aliquoter Theil und d in Z genau enthalten n mal.

$\frac{Za}{d} = a + \frac{ua}{d}$ wenn d in Z einmal enthalten und nach dem d von Z einmal weggenommen, noch u übrig bleibt.

Endlich ist $\frac{Za}{d} = na + \frac{ua}{d}$ wenn d in Z enthalten n mal, und noch u übrig geblieben, wenn d von Z n mal weggenommen worden.

7.

7. Zusatz. Das u im Zusatz 6. muß $< d$ seyn, weil sonst d noch Ein oder etlichemale in u enthalten wäre, welches den Quotienten um Ein oder mehrere a vermehren würde.

8. Zusatz. Wenn d von D ein aliquanter Theil, folglich $\frac{D}{d} = Q + \frac{u}{d}$ so ist $D = (Q + \frac{u}{d}) \times d$

$$= Qd + \frac{u}{d} \times d \; (\S. 37.)$$

$$= Qd + u$$

Woraus sich auch in diesem Falle die Richtigkeit des Quotienten beurtheilen läßt.

9. Zusatz. Da $abcde : bcd = ae$ und sich $abcde$ so wohl durch b; c als d genau theilen läßt; so ist offenbar, daß dasjenige, was sich durch ein Produkt theilen läßt, sich auch durch jeden Faktor dieses Produkts theilen laße.

§. 63.

Lehrsatz. Wenn $AH = BG$

so ist $\frac{A}{B} = \frac{G}{H}$

Beweis. Wenn $AH = BG$

so ist auch $\frac{AH}{B} = G$ (§. 54.)

da nun $\frac{AH}{B} = \frac{A}{B} \times H$ (§. 60. a.)

so ist auch $\frac{A}{B} \times H = G$ (§. 6.)

Folglich $\frac{A}{B} = \frac{G}{H}$ (§. 54.)

§. 63. a.

Zusatz. Eben so kann unter der im §. 63. angenommenen Bedingung bewiesen werden, daß $\frac{A}{G}=\frac{B}{H}$; $\frac{B}{A}=\frac{H}{G}$ $\frac{G}{H}=\frac{A}{B}$ u. s. f.

§. 64.

Lehrsatz. Wenn $\frac{A}{B}=\frac{G}{H}$

so ist $AH=BG$

Beweis. Wenn $\frac{A}{B}=\frac{G}{H}$

so ist $A=\frac{G}{H}\times B$ (§. 51. Zus. 4.)

also $A=\frac{GB}{H}$ (§. 60.)

Folglich $AH=BG$ (§. 51. Zus. 4.)

§. 64. a.

Lehrsatz. Wenn $\frac{A}{B}=\frac{G}{H}$

so ist $\frac{B}{A}=\frac{H}{G}$

Beweis. Wenn $\frac{A}{B}=\frac{G}{H}$

so ist $AH=BG$ §. 64.

Folglich $\frac{B}{A}=\frac{H}{G}$ (§. 63. a.)

§. 64. b.

Lehrsatz. Es ist $\frac{Ac}{Bc} = \frac{A}{B}$

Beweis. Es sey $\frac{Ac}{Bc} = x$

so ist $Ac = xBc$ (§. 51. Zus. 4.)

folglich $A = xB$ (§. 54.)

also $\frac{A}{B} = x$ (§. 51. Zus. 4.)

daher $\frac{Ac}{Bc} = \frac{A}{B}$ (§. 6.)

§. 64. c.

Lehrsatz. Es ist $\frac{A:c}{B:c} = \frac{A}{B}$

Beweis. Es sey $A:c = x$ und $B:c = y$

so ist $\frac{A:c}{B:c} = \frac{x}{y}$ (§. 54.)

Also $(A:c)y = x(B:c)$ (§. 64.)

folglich $\frac{Ay}{c} = \frac{xB}{c}$ (§. 60.)

und $Ay = xB$ (§. 55.).

auch $\frac{A}{B} = \frac{x}{y}$ (§. 63.)

folglich $\frac{A:c}{B:c} = \frac{A}{B}$ (§. 6.)

Das dritte Kapittel.

Allgemeine Begriffe von den Dignitäten.

§. 65.

Erklärung. Wenn der Multiplikator und das Multiplikand gleiche Größen, so heißt das daher entstandene Produkt: das Quadrat, die andre Dignität, die andre Potenz, die andre Potestät, oder der andre Grad von einem dieser Faktoren. Der eine Faktor hingegen, heißt von dem Quadrate die Wurzel und zwar bestimmt die Quadratwurzel, die Wurzel der andern Dignität 2c.

§. 66.

Anmerkung. Es sey Z. B. a = dem Multiplikand
a = , Multiplikator

So ist a a = dem Produkte.

Hier ist a a das Quadrat von a, und a in Beziehung auf a a die Wurzel und zwar bestimmt die Quadratwurzel, die Wurzel der andern Dignität u. s. f.

§. 67.

Erklärung. Wird das Quadrat, oder die andre Dignität wiederum durch die Wurzel multiplicirt, so entsteht ein Produkt, welches man den Cubus, Würfel, oder die dritte Dignität u. s. f. von jener Wurzel nennt. Die Wurzel aber heißt in Beziehung auf die dritte Dignität, die Wurzel der dritten Dignität oder die Cubikwurzel u. s. f. Woraus leicht zuersehn, welches die vierte, fünfte, Dignität 2c einer Größe, oder welches die Wurzel derselben.

§. 68.

1. Zusatz. Wenn wir uns also die Dignitäten in ihrer natürlichen

türlichen Folge auf einander vorstellen und a zur Wurzel annehmen, so ist

a	=	der ersten Dignität oder der Wurzel				
aa	=	=	2.	=	=	dem Quadrat
aaa	=	=	3.	=	=	dem Würfel
aaaa	=	=	4.	=	=	dem Biquadrat

2. Zusatz. Die Anzahl der gleichen Faktoren einer Dignität bestimmt also den Grad derselben. Es kann also

3. Zusatz. Ein und eben dieselbe Größe, bald diese, bald jene Dignität haben oder seyn, und es kann daher auch ein und eben dieselbe Größe bald als eine Dignität, bald als eine Wurzel angesehn werden. Will man

4. Zusatz. Eine Größe zu einer bestimmten Dignität, erheben; so darf man selbige nur so oft durch das Zeichen der Multiplikation verbinden, als es der Grad der Dignität anzeigt.

5. Zusatz. Dignitäten können nur Zahlen seyn. (§. 39. Zus. 2.)

§. 69.

Anmerkung. Damit die im vorigen § unter 4. angezeigte Art, die Dignität einer Größe auszudrükken, in manchen Fällen nicht zu weitläuftig werde; so hängt man der Größe, die zu einer Dignität erhoben werden soll, oben zur rechten das Zeichen an, welches den Grad der Dignität ausdrükt. Z. B.

a ist zur dritten Dignität erhoben schreibt man a^3

a = 12. = = = = a^{12}

a = m. = = = = a^m

Es ist daher a^m ein Produkt, worin m Faktoren, deren jeder = a

§. 70.

Erklärung. Dasjenige Zeichen, (§. 69.) welches den Grad der Dignität anzeigt, heißt der Exponent der Dignität. Er ist $= 1$, wenn an dem Orte des Exponenten gar kein Zeichen befindlich ist.

Von a^3 ist der Exponent der Dignität $= 3$

„ a^m „ „ „ „ „ $= m$

„ a „ „ „ „ „ $= 1$

a aber in allen diesen Fällen dieser Dignitäten Wurzel.

§. 71.

1. Zusatz. Wenn Dignitäten einerley Wurzel und einerley Exponenten haben, so sind sie Größen von einerley Art (§. 1. Vor.) (a^m und a^m) und wenn sie entweder verschiedene Wurzeln (a^3 und b^3) oder verschiedene Exponenten (a^3 und a^2) oder verschiedne Exponenten und verschiedene Wurzeln zugleich haben, (a^3 und b^2) so sind sie Größen von verschiedener Art.

2. Zusatz. Sind zwey Größen einander gleich, so müssen auch die Dignitäten von einerley Grade einander gleich seyn (§. 35.) und sind sie ungleich; so sind auch die Dignitäten von einerley Grade ungleich; oder wenn $a = b$ so ist auch $a^m = b^m$ und wenn $a > c$ so ist auch $a^m > c^m$

3. Zusatz. Wenn zwey Dignitäten und deren Exponenten gleich, so sind es auch deren Wurzeln; oder wenn $a^m = b^n$ und $m = n$ so ist auch $a = b$.

4. Zusatz. Wenn zwey Dignitäten und ihre Wurzeln gleich; so sind es auch deren Exponenten, oder wenn

$a^m = b^n$ und $a = b$ so ist auch $m = n$

5. Zus: Da eine Dignität durch die Multiplikation aus ihrer Wurzel entsteht (§. 65) so finden wir die Wurzel derselben durch die Division (§. 51. Zus. 2.). Wenn daher zwey Dignitäten von einerley Grade gleiche Größen, so sind auch die Wurzeln eines und eben deßelben Grades gleiche Größen; und sind sie ungleich, so sind es auch die Wurzeln eines und eben deßelben Grades oder wenn $a^m = b^m$ so ist auch $a = b$ und wenn $a^m > b^m$ so ist auch $a > b$.

§. 72.

Anmerkung. Der Exponent der Dignität einer Größe, die mit andern durch die Multiplikation verbunden ist, bezieht sich nur allein auf die Größe, der er unmittelbar angehängt ist. Soll er sich auch auf die übrigen beziehn, so müßen sie eingeklammert und dann der Exponent der Dignität hinzu gesezt werden. So zeigt z. B. $5a^3$ so viel als, daß a zur dritten Dignität erhoben, und diese Dignität 5 mal genommen worden ist. Hier bezieht sich der Exponent 3 nur blos auf a. Soll er sich auch auf die 5 beziehn, so schreibt man $(5a)^3$ und dann bedeutet dieser Ausdruk so viel, als daß $5a$ zur dritten Dignität erhoben worden. Daß dieser Ausdruk von dem vorigen verschieden sey, ist von selbst klar.

§. 73.

Erklärung. Wenn die Dignität einer Größe mit andern durch die Multiplikation zusammenhängt, so heißen die Faktoren, auf die sich der Exponent der Dignität nicht bezieht, der Coefficient des ganzen Ausdruks, worinn die Dignität befindlich ist: dieser Coefficient ist $= 1$, wenn er nicht durch ein besonderes Zeichen ausgedrükt worden. (§. 34. Zus. 3.)

§. 74.

Aufgabe. Dignitäten zu einander addiren und von einander subtrahiren. Auflösung.

Auflösung. Wenn die zu einander zu addirenden oder von einander zu subtrahirenden Dignitäten

I. Größen von einerley Art, (§. 71.) so addire man im erstern Falle ihre Coefficienten zu einander, im letztern Falle aber subtrahire man sie von einander, und hänge der Summe oder der Differenz die Dignität mit dem Zeichen der Multiplikation an. So ist z. B.

Die Summe von $5a^3$ und $4a^3 = 9a^3$

„ „ „ $6b^4$ „ $b^4 = 7b^4$

„ „ „ ma^n „ $ca^n = (m+c)a^n$

„ Differenz „ $9a^3$ „ $4a^3 = 5a^3$

„ „ „ $7b^4$ „ $2b^4 = 5b^4$

„ „ „ ma^n „ $ca^n = (m-c)a^n$ Sind sie aber

II. Größen von verschiedener Art, so kann man das Addiren und Subtrahiren nur durch Hülfe der Zeichen + und — verrichten (§. 12.22.). So ist z. B.

Die Summe von $5a^3$ und $3a^2 = 5a^3 + 3a^2$

„ „ „ $5a^3$ „ $6b^3 = 5a^3 + 6b^3$

„ „ „ $9a^2$ „ $4b^5 = 9a^2 + 4b^5$

„ „ „ ca^m „ $db^n = ca^m + db^n$

„ Differenz „ $6b^4$ „ $3a^4 = 6b^4 - 3a^4$

„ „ „ $6a^5$ „ $3a^3 = 6a^5 - 3a^3$

„ „ „ $6a^5$ „ $3d^3 = 6a^5 - 3d^3$

„ „ „ a^2 „ $bd^5 = a^2 - bd^5$

§. 75.

Aufgabe. Zwey oder mehrere Dignitäten durch einander multipliciren.

Auflösung. Wenn die durch einander zu multiplicirenden Dignitäten

I. einerley Wurzeln haben. In diesem Fall nehme man die gemeinschaftliche Wurzel und hänge derselben einen Exponenten an, welcher = der Summe der Exponenten aller Faktoren.

So ist z. B. $a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$

Beweis Es ist $aaa = a^3$ (§. 69.)

und $aa = a^2$

daher ist $a^3 \times a^2 = aaa \times aa = aaaaa = a^5$

Haben sie aber

II. verschiedene Wurzeln, so geschieht die Multiplikation durch Hülfe der Zeichen dieser Rechnungsart.

§. 76.

1. Zusatz. Es ist also $3a^2 \times 4a^5 = 12a^7$

$$5a^3 \times 6b^2 = 30a^3b^2$$

$$ma^n \times ca^x = mca^{n+x}$$

$$q^{r+m} = q^r \times q^m$$

$$q^6 R^{\cancel{6}} = q^5 \times q = q^4 \times q^2 = q^3 \times q^3$$

$$ma^n \times cb^x = mca^nb^x$$

2. Zusatz. Es ist $a^m \times a^m = a^{m+m} = a^{2m}$ daher ist a^{2m} = der andern Dignität von a^m. Eben so ist $a^m \times a^m \times a^m = a^{3m}$ = der dritten Dignität von a^m. Daher wird

3. Zusatz. Eine Dignität auf eine andre Dignität erhoben, wenn der Exponent der Dignität, die zu einer andern erhoben werden soll, durch den Exponenten der Dignität, wozu sie erhoben werden soll, multiplicirt wird, die Wurzel aber unverändert bleibt. Es gibt also a^m zur qten Dignität erhoben, a^{mq}, von welcher folglich die Wurzel der q. Dignität $= a^m$.

4. Zusatz. Daher ist umgekehrt $a^{nr} = (a^n)^r = (a^r)^n$

§. 77.

Aufgabe. Eine Dignität durch eine andere dividiren.

Auflösung. Die durch einander zu dividirende Dignitäten haben

I. Einerley Wurzeln. In diesem Fall ist der Quotient = der gemeinschaftlichen Wurzel, zu einer Dignität erhoben, deren Exponent = dem Exponenten des Dividens weniger dem Exponenten des Divisors. So ist z. B.

$a^5 : a^2 = a^{5-2} = a^3$

Beweis. Es ist $aaaaa = a^5$

und $aa = a^2$

da nun $aaaaa : aa = aaa$ (§. 51. Zus. 2.)

und $aaaaa : aa = a^5 : a^2$

So ist $a^5 : a^2 = aaa = a^3$. Haben sie aber

II. Verschiedene Wurzeln so geschieht die Division durch Hülfe des Zeichens dieser Rechnungsart. So ist z. B.

a^4 dividirt durch $b^2 = a^4 : b^2$

§. 78.

Zusatz. Es ist also $12a^7 : a^5 = 12a^2$

$12a^7 : 3a^5 = 4a^2$

$12a^7 : b^3 = 12(a^7 : b^3)$

$12a^7 : 3b^3 = 4(a^7 : b^3) = 4a^7 : b^3$

$ma^n : a^r = ma^{n-r}$

$ma^n : ma^r = a^{n-r}$

$ma^n : ca^r = (m : c)\, a^{n-r}$

$ma^n : b^r = m(a^n : b^r)$

$ma^n : cb^r = (m : c)(a^n : b^r)$

§. 79.

Lehrsatz. Es ist $\frac{a}{e^m} : e^n = \frac{a}{e^{m+n}}$

Beweis. Es sey $\frac{a}{e^m} : e^n = x$

so ist $\frac{a}{e^m} = e^n x$ (§. 51. Zus. 4.)

Folglich

Folglich $a = e^m e^n x = e^{m+n} x$

Also $\frac{a}{e^{m+n}} = x$

Folglich $\frac{a}{e^m} : e^n = \frac{a}{e^{m+n}}$

§. 80.

Lehrsatz. Eine jede Größe in der Dignität 0 ist = 1.

Oder $a^0 = 1$.

Beweis. Es ist $a^m : a^m = a^{m-m}$ (§. 77.)

Nun ist $a^{m-m} = a^0$ (§. 22. n. 5.)

Also $a^m : a^m = a^0$

Aber es ist $a^m : a^m = 1$ (§. 51. Zus. 8.)

Folglich $a^0 = 1$.

Das vierte Kapittel.

Von Verhältnißen, Proportionen, und Progreßionen.

§. 81.

Erklärung. Man denkt sich zwey Größen [illegible] und B in einem Verhältniß, wenn man [illegible] 1. Um wieviel die eine größ[illegible] als die and[illegible] [illegible]ersucht: 2. Wie oft die ein[illegible] in der andern [illegible] [illegible]halten sey. Ist das erstere

stere, so nennt man das Verhältniß arithmetisch, und im letztern Fall geometrisch. Die Größen A und B, die man sich in einem Verhältniß denkt, heissen die Glieder des Verhältnißes. Ein Glied ist das vorhergehende, das andere das folgende.

§. 82.

1. Zusatz. Die nähere Bestimmung der Größe eines arithmetischen Verhältnißes geschieht daher durch die Subtraktion (§. 22. Zus. 1.) und die des geometrischen durch die Division. (§. 48.)

2. Zusatz. Die Glieder eines Verhältnißes müßen Grössen von einerley Art seyn.

§. 83.

Erklärung. Diejenige Größe, wodurch die Grösse eines Verhältnißes näher bestimmt wird, heißt der Name des Verhältnißes.

§. 84.

Erklärung. Der Name des arithmetischen Verhältnisses heißt der Denominator. Er ist der Unterschied zwischen dem folgenden und dem vorhergehendem Gliede.

§. 85.

1. Zusatz. Wenn also des Arithmetischen Verhältnißes vorhergehendes Glied $= A$
das folgende $= B$
der Denominator $= d$ so ist
$d = B - A$.
also $B = A + d$ (§. 24.)
und $A = B - d$ (§. 25.)

2. Zusatz. Wo sich also $B - A = d$ findet, da kann man sich ein arithmetisches Verhältniß denken, worin die zu verringernde Größe B das folgende, die subtrahirende Größe

Größe A das vorhergehende Glied, und die Differenz d der Denominator ist.

§. 86.

Erklärung. Der Name des geometrischen Verhältnisses heißt der Exponent des Verhältnißes. Er ist der Quotient des folgenden Gliedes durch das vorhergehende.

§. 87.

1. Zusatz. Wenn also des geometrischen Verhältnißes vorhergehendes Glied $= A$ das
folgende " $= B$, der
Exponent des Verhlt. $= e$ so ist
$e = B : A$
also $B = Ae$ (§. 47.)
und $A = B : e$ (§. 51. Zus. 2.)

2. Zusatz. Wo sich also $B : A = e$ findet, da kann man sich ein geometrisches Verhältniß denken, worin das Dividend B das folgende, der Divisor A das vorhergehende Glied, und der Quotient e der Exponent des Verhältnißes ist.

§. 88.

Erklärung. Sind die Glieder eines Verhältnißes einander gleich, so heißt das Verhältniß gleichgliedrig; sind sie aber ungleich, ungleichgliedrig.

§. 89.

1. Zusatz. In einem gleichgliedrigen arithmetischen Verhältniß ist der Denominator $= 0$ (§. 22. Zus. 5.) und in einem dergleichen geometrischen der Exponent $= 1.$ (§. 51. Zus. 8.)

§. 90.

Anmerkung. In den Vorlesungen werde ich die Ursachen angeben, warum ich mich, statt des gewöhnlichen Ausdruks eines gleichen und ungleichen Verhältnißes, des Ausdruks gleichgliedrig und ungleichgliedrig bediene.

§. 91.

Erklärung. Da die Größe eines Verhältnißes durch die Größe des Namens deßelben bestimmt wird (§. 83); so sind Verhältniße einander gleich, wenn sie gleiche Namen haben, und ungleich, wenn das nicht ist.

§. 92.

Zusatz. Verhältniße von welchen eine Gleichheit oder Ungleichheit behauptet wird, müßen von einerley Art seyn: daher ein arithmetisches Verhältniß einem geometrischen weder gleich noch ungleich seyn kann.

§. 93.

Erklärung. Die Gleichheit zweyer Verhältniße heißt eine Proportion. Sie ist arithmetisch oder geometrisch, nach dem sie aus arithmetischen oder geometrischen Verhältnißen zusammen gesetzt ist.

§. 94.

Zusatz. Eine Proportion besteht aus zweyen Verhältnißen, und daher aus vier Gliedern.

§. 95.

1. Anmerkung. Das Zeichen der Gleichheit zwischen den gleichen Verhältnißen, würde also eine sehr natürliche Bezeichnung für die Proportionen geben. Vorläufig sollen also Proportionen, die aus den gleichen Verhältnißen von A zu B und von G zu H bestehn, folgender gestalt ausgedrükt werden:

das Arithmetische Verhältniß von A zu B = G zu H.

das Geometrische Verhältniß von A zu B = G zu H.

2. Anmerkung. Durch Worte drückt man auch eine Proportion noch folgendergestalt aus

a. A verhält sich arithmetisch oder geometrisch zu B wie G zu H.

b. A, B, G und H machen eine arithmetische oder geometrische Proportion. Wobey zu bemerken ist, daß die Ordnung der Glieder nicht verändert werden müße. Daher heißen dann auch A das erste, B das zweyte, G das dritte und H das vierte Glied der Proportion.

3. Anmerkung. Wenn künftig bey einer Proportion nicht bestimmt wird, ob sie geometrisch oder arithmetisch sey, so wird erstere darunter verstanden.

§. 96.

1. Erklärung. Das erste und vierte Glied einer Proportion (§. 95. A. 2. b) heißen äußere, das zweyte und dritte Glied mittlere oder innere Glieder.

2. Erklärung. Das erste und dritte Glied einer Proportion heißen Vorderglieder, und das zweite und vierte Glied Hinterglieder.

3. Erklärung. Durch gleichnamige Glieder versteht man entweder Vorderglieder oder Hinterglieder.

§. 97.

Erklärung. Eine Proportion mit gleichen mittlern Gliedern heißt stetig, zusammenhängend (continua): mit ungleichen abgesondert (discreta).

§. 98.

Anmerkung. A zu B = B zu H. drückt eine stetige Proportion und A zu B = G zu H, eine dergleichen abgesonderte aus.

§. 99.

§. 99.

1. Erklärung. In der zusammenhängenden Proportion (§. 9 .) steht in den beiden mittlern Gliedern einerley Grösse, welche daher die mittlere Proportionalgröße zwischen den beyden äußern heißt.

2. Erklärung. In einer Proportion heißt die im vierten Gliede stehende Größe die vierte Proportionalgröße zu den im ersten, zweiten, und dritten Gliede befindlichen Grössen.

3. Erklärung. In der zusammenhängenden Proportion heißt die im vierten Gliede stehende Größe auch die dritte Proportionalgröße zu den beyden vorhergehenden.

Von Arithmetischen Proportionen.

§. 100.

Lehrsatz. Wenn das Arithmetische Verhältniß

A zu B = G zu H

so ist A — B = G — H

Beweis. In dem arithmetischen Verhältniß

A zu B ist B — A = d und in dem

G zu H ist H — G = d (§. 85.)

da nun d = d (§. 91.)

so ist B — A = H — G

Folglich A — B = G — H (§. 26.)

D. i. In einer arithmetischen Proportion ist die Differenz des ersten und zweiten Gliedes gleich der Differenz des dritten und vierten.

§. 101.

Lehrsatz. Wenn A — B = G — H so ist das arithmetische Verh. A zu B = G zu H.

Beweis.

Beweis. Wenn $A - B = G - H$ so ist
$B - A = H - G$. §. 26.
Nun sey $B - A = d$ so ist hier ein arithmetisches Verhältniß von A zu B. (§. 85. Zus. 2.) Aber es ist $B - A = H - G$. Folglich ist auch $H - G = d$, daher hier auch das arithmetische Verhältniß von G zu H (§. 85. Zus. 2.) Aber beyde Verhältniße haben einerley Denominator d und sind daher gleich (§. 91.). Daher unter der angenommenen Bedingung das arithmetische Verhältniß von A zu B = G zu H.

§. 102.

Zusatz. Man kann daher eine arithmetische Proportion, die aus den beyden gleichen Verhältnißen von A zu B und von G zu H bestehet durch die gleichen Differenzen $A - B$ und $G - H$ ausdrükken. Daher ist

$$A - B = G - H$$

eine arithmetische Proportion, worinn A, B, G und H der Ordnung nach proportioniret.

§. 103.

Zusätze. 1 Wenn $A - B = G - H$ so ist
$B - A = H - G$ (§. 26.)
Man kann daher in einer Arithmetischen Proportion die Glieder eines Verhältnißes verwechseln, und es entsteht wiederum eine Proportion, wenn man nur die Glieder des andern Verhältnißes auch verwechselt. Auch ist

2. Zusatz. $A - G = B - H$ (§. 25.) D. i. In einer Arithmetischen Proportion kann man die mittlern Glieder verwechseln und die Größen bleiben auch in dieser Ordnung arithmetisch proportionirt. Es ist

3. Zusatz. $A + H = B + G$ (§. 24.) D. i. In einer Arithmetischen Proportion ist die Summe rc. Daher ist

4. Zusatz. $\left.\begin{array}{l} A = B + G - H \\ B = A + H - G \\ G = A + H - B \\ H = B + G - A \end{array}\right\}$ (§. 25.)

Man kann also aus dreyen Gliedern einer Arithmetischen Proportion das vierte finden.

5. Zusatz. Wenn umgekehrt $A + H = B + G$ so ist
$A - B = G - H$ (§. 25.)
Aus den summirenden Größen zweyer gleichen Summen läßt sich eine Arithmetische Proportion machen, wenn man rc.

6. Zusatz. Wenn $A - B = G - H$ und noch überdem $B = G$, also aus der abgesonderten Proportion
$A - B = G - H$ (§. 97.) die stetige Proportion
$A - B = B - H$ wird; so ist
$A + H = B + B = 2B$ (Zus. 3.) daher
$A = 2B - H$ (§. 23.)
$H = 2B - A$ (§. 23.) und
$B = (A + H) : 2$ (§. 54.)
Man kann daher auch ein Glied einer stetigen Arithmetischen Proportion aus den übrigen finden.

§. 103. a.

Anmerkung. Daß bey allen diesen Veränderungen, welche mit den Gliedern einer Proportion gemacht werden, auf den Zus. 2. §. 82. Rücksicht genommen werden müße, errinnere ich hier für beyde Arten der Proportionen. Davon in den Vorlesungen ein mehreres.

§. 104.

Lehrsaz. Wenn $A - B = G - H$
und $A = B$

So ist auch $G = H$

Beweis.

Beweis. Wenn $A - B = G - H$
so ist $A + H = B + G$ (§. 103. Z. 3.)
Wenn nun auch $A = B$ so ist auch
$H = G$ §. 23.

§. 105.

1. Zusaz. Eben so folgt, daß $A = B$ sey, wenn $G = H$ ist. Wenn also in einer Arithmetischen Proportion das eine Verhältniß gleichgliedrig ist (§. 88.) so ist es das andre auch.

2. Zusaz. Ferner folgt, daß $B = H$ sey wenn $A = G$ ist, und umgekehrt. Wenn daher ein Paar der gleichnamigen Glieder (§. 96. u. 3.) einer Arithmetischen Proportion gleich ist; so ist es das andere Paar auch.

§. 106.

Lehrsaz. Wenn $A - B = G - H$
und $A > B$
so ist auch $G > H$.

Beweis Wenn $A - B = G - H$
so ist $A + H = B + G$ (§. 103. Z. 3.)
Wenn nun auch $A > B$
so ist auch $H < G$ (§. 29.)

§. 107.

1. Zusaz. Wenn also in einer Arithmetischen Proportion das erste Glied größer als das zweyte, so ist auch das dritte Glied größer als das vierte, und umgekehrt.

2. Zusaz. Wenn $A > G$; so ist auch $B > H$.

§. 108

§. 108.

Lehrsaz. Wenn zu den Größen A und B gleiche C addirt werden, so machen jene und die durch die Addition entstandene Summen ($A + C$) und ($B + C$) eine Arithmetische Proportion oder $A - B = (A + C) - (B + C)$

Beweis. Es ist $A + (B + C) = B + (A + C)$ (§. 4. n. 1.)
Folglich $A - B = (A + C) - (B + C)$ (§. 103. n. 5.)

§. 109.

Zusaz. Wenn von zweyen Größen gleiche abgezogen werden, so machen die ungleichen Größen und die Differenzen eine Arithmetische Proportion.

§. 110.

Lehrsaz. Wenn $A - B = C - D$
und $E - F = C - D$
So ist $A - B = E - F$

Beweis. Wenn $A - B = C - D$ so ist $A - B + D = C$
Wenn $E - F = C - D$ so ist $E - F + D = C$
Folglich ist $A - B + D = E - F + D$ (§. 6.)
Also $A - B = E - F$ (§. 23.)

D. i. Wenn von zweyen Arithmetischen Verhältnißen jedes so gros als ein drittes, so sind sie einander gleich.

Von Geometrischen Proportionen.

§. 111.

Lehrsaz. Wenn das Geometrische Verhältnis von
A zu B = G zu H
so ist $A : B = G : H$

Beweis.

Beweis. In dem geometrischen Verhältniß von

A zu B ist $B : A = e$ und in dem von

G zu H ist $H : G = e$ (§. 87.)

Da nun $e = e$ (§. 91.)

so ist $B : A = H : G$

Folglich $A : B = G : H.$ (§. 64. a.)

D. i. In einer geometrischen Proportion ist der Quotient des ersten Gliedes durch das zweyte gleich dem Quotient des dritten durchs vierte.

§. 112.

Lehrsatz. Wenn $A : B = G : H$ so ist das geometrische Verhältniß A zu $B = G$ zu H

Beweis. Wenn $A : B = G : H$; so ist

$B : A = H : G.$ (§. 64. a.)

Nun sey $B : A = e$; so ist hier ein geometrisches Verhältniß von A zu B (§. 87. Zus. 2.). Aber es ist $B : A = H : G$. Folglich ist auch $H : G = e$ daher hier auch das geometrische Verhältniß von G zu H (§. 87. Zus. 2.). Aber beyde Verhältniße haben einerley Exponent e, und sind daher gleich (§. 91.) daher unter der angenommenen Bedingung das Geometrische Verhältniß von A zu $B = G$ zu H.

§. 113.

Zusatz. Eine geometrische Proportion, die aus den beyden gleichen Verhältnißen von A zu B und von G zu H besteht, kann man daher durch die gleichen Quotienten $A : B$ und $G : H$ ausdrükken. Daher ist $A : B = G : H$ eine geometrische Proportion worin A, B, G und H der Ordnung nach proportionirt sind.

2. Zusatz. Wenn also $\frac{A}{B} = \frac{G}{H}$ so ist $A : B = G : H$

und wenn $A : B = G : H$ so ist $\frac{A}{B} = \frac{G}{H}$

Man kann daher aus dem Dividend und Divisoren zweyer gleichen Quotienten eine geometrische Proportion und aus dieser zwey gleiche Quotienten machen.

3. Zusatz. Man kann also das erste und dritte Glied einer geometrischen Proportion als Dividenden, das zweyte und vierte Glied als die Divisoren zweyer gleichen Quotienten ansehen und behandeln.

4. Zusatz. Umgekehrt kann man auch die Dividenden zweyer gleichen Quotienten als das erste und dritte Glied, ihre Divisoren aber als das zweite und vierte Glied einer geometrischen Proportion ansehn und behandeln.

§. 114.

Lehrsatz. Wenn $A : B = G : H$
so ist $B : A = H : G$.

Beweis. Wenn $A : B = G : H$

so ist $\frac{A}{B} = \frac{G}{H}$ (§. 113. Zus. 3.)

und also $\frac{B}{A} = \frac{H}{G}$ (§. 64. a.)

daher $B : A = H : G$ (§. 113. Zus. 1. 4.)

D. i. Man kann in einer geometrischen Proportion die Glieder eines Verhältnißes verwechseln, und es entsteht wiederum eine Proportion, wenn man nur die Glieder des anderen Verhältniße auch verwechselt.

§. 115.

Lehrsatz. Wenn $A : B = G : H$
so ist $AH = BG$

Beweis. Wenn $A : B = G : H$
so ist $\frac{A}{B} = \frac{G}{H}$ (§. 113. Zus. 1. 3.)
Folglich $AH = BG$. (§. 64.)

D. i. In einer geometrischen Proportion ist das Produkt der äußern Glieder gleich dem Produkt der innern.

§. 116.

1. Zusatz. Da $AH = BG$ in einer geom. Proport.
so ist
$$\left.\begin{aligned} A &= BG : H \\ B &= AH : G \\ G &= AH : B \\ H &= BG : A \end{aligned}\right\} \quad (\text{§. } 54.)$$

Man kann also aus dreyen Gliedern einer geometrischen Proport. das vierte finden.

2. Zusatz. Da $A = \frac{BG}{H}$ (Zus. 1.)
$$= \frac{B}{H} \times G \; (\text{§. } 60. \; 2.)$$
so ist $\frac{A}{G} = \frac{B}{H}$ (§. 54.)
und $A : G = B : H$ (§. 113. Zus. 1. 4.)

In einer geometrischen Proportion kann man daher auch die mittleren Glieder verwechseln und die Größen bleiben auch in dieser Ordnung geometrisch proportionirt.

3 Zusatz. Wird B = G folglich aus der abgesonderten geom. Prop. A : B = G : H

die stetige A : B = B : H so

wird $AH = BB = B^2$

Folglich $A = B^2 : H$ (§. 54.)

$H = B^2 : A$ (§. 54.)

und B = der Quadrat Wurzel aus AH (§. 65.)

§. 117.

Lehrsatz. Wenn A : B = G : H
und A = B
so ist G = H

Beweis. Wenn A : B = G : H
so ist AH = BG (§. 115.)
wenn nun auch A = B
so ist H = G (§. 54.)

§. 118.

1. Zusatz. Eben so folgt daß A = B sey wenn G = H ist. Wenn also in einer geometrischen Proportion das eine Verhältniß gleichgliedrig ist (§. 88.) so ist es das andere auch.

2. Zusatz. Ferner folgt daß B = H sey, wenn A = G ist, und umgekehrt. Wenn daher ein Paar der gleichnamigen Glieder (§. 96. n. 3.) einer geometrischen Proportion gleich ist, so ist es das andere Paar auch.

§. 119.

Lehrsatz. Wenn $A : B = G : H$
und $A > B$
so ist $G > H$.

Beweis. Wenn $A : B = G : H$
so ist $AH = BG$ (§. 115.)
wenn nun auch $A > B$
so ist $H < G$ (§. 61.)

D. i. Wenn in einer geometrischen Proportion das erste Glied größer als das zweyte, so ist auch ꝛc.

§. 120.

Zusatz. Wenn $A > G$, so ist auch $B > H$.

§. 121.

Lehrsatz. Wenn die Größen A und B durch eine Größe c multiplicirt werden, so machen jene Größen und die durch die Multiplication entstandenen Produkte Ac und Bc eine geometrische Proportion oder

$$A : B = Ac : Bc$$

Beweis. Es ist $\frac{A}{B} = \frac{Ac}{Bc}$ (§. 64. b.)

daher $A : B = Ac : Bc$ (§. 113. Zus. 1. 4.)

§. 122.

Lehrsatz. Werden die Größen A und B durch eine Größe c dividirt, so verhalten sich jene geometrisch wie die entstandene Quotienten oder

$$A : B = (A : c) : (B : c)$$

Beweis.

Beweis. Es ist $\frac{A}{B} = \frac{A:c}{B:c}$ (§. 64. c.)

Folglich $A : B = (A : c) : (B : c)$ (§. 113. Zus. 1. 4.)

§. 123.

Zusatz. Wenn also $c = d$ so ist:

$A : B = Ac : Bd$ und

$A : B = (A : c) : (B : d)$

§. 124.

Lehrsatz. Wenn $A : B = C : D$

und $E : F = C : D$

so ist $A : B = E : F$

Beweis. Wenn $A : B = C : D$ so ist $AD = BC$ (§. 115.)

und wenn $E : F = C : D$ so ist $ED = FC$ (§. 115.)

also $\frac{AD}{ED} = \frac{BC}{FC}$ (§. 54.)

folglich $\frac{A}{E} = \frac{B}{F}$ (§. 64. b.)

daher $A : E = B : F$ (§. 113. Zus. 1. 4.)

also $A : B = E : F$ (§. 116. Zus. 2.)

D. i. Wenn von zweyen geometrischen Verhältnißen jedes so gros als ein drittes; so ꝛc.

§. 125.

1 Zusatz. Wenn $A : B = C : D$

und $E : B = C : D$

so ist auch $A = E$. (§. 118. Zus. 2.)

D. i.

D. i. Wenn in zweyen geometrischen Proport. ꝛc.

2. Zusatz. Wenn $A : B = C : D$
und $A : E = C : F$
so ist auch $B : D = E : F$
und $B : E = D : F$ (§. 116. Zus. 2.)

D. i. Wenn in zweien Proportionen das Verhältniß der vordern Glieder ꝛc.

§. 126.

Lehrsatz. Wenn $A : B = G : H$
so ist 1. $Ac : Bc = G : H$
2. $A : B = Gc : Hc$
3. $Ac : B = Gc : H$
4. $A : Bc = G : Hc$
5. $Ac : Bc = Gc : Hc$

Beweis. Es ist $A : B = Ac : Bc$ (§. 121.)
da nun $A : B = G : H$ V. d Bed.
so ist auch $Ac : Bc = G : H$ (§. 124.)

w. d. 1te w.

Ferner ist $G : H = Gc : Hc$ (§. 121.)
und $A : B = G : H$ V. d. Bed.
also auch $A : B = Gc : Hc$ (§. 124.)

w. d. 2te w.

Da $A : B = G : H$ V. d. Bed.
und $A : G = B : H$ (§. 116. Zus. 2.)
auch $Ac : Gc = B : H$ nach n. 1.
so ist auch $Ac : B = Gc : H$ (§. 116. Zus. 2.)
w. d. 3te w.

Da

Da $A : B = G : H$ V. d. Bed.
und $A : G = B : H$ (§. 116 Zus. 2.)
auch $A : G = Bc : Hc$ nach n. 2.
so ist $A : Bc = G : Hc$

w. d. 4te w.

da endlich $Ac : Bc = G : H$ nach n. 1.
$A : B = Gc : Hc$ nach n. 2.
und $A : B = G : H$ V. d. Bed.
so ist auch $Ac : Bc = Gc : Hc$

w. d. 5te w.

D. i. Die Glieder eines Verhältnißes einer geometrischen Proportion oder ein Paar der gleichnamigten Glieder, oder alle Glieder derselben durch eine Größe multiplicirt, giebt wiederum eine geometrische Proportion.

§. 127.

Zusatz. Wenn $A : B = G : H$
so ist auch 1. $AE : BF = GE : HF$

2. $A^2 : B = AG : H$

3. $A : B^2 = G : BH$ und

4. $A^2 : B^2 = AG : BH$

§. 128.

Lehrsatz. Wenn $A : B = G : H$
so ist $(A : c) : (B : c) = G : H$

Beweis.

Beweis. Es ist $(A:c):(B:c) = A:B$ (§. 122.)
und $A:B = G:H$ V. d. Bed.
also $(A:c):(B:c) = G:H$ (§. 124.)

§. 129.

Zusatz. Eben so folgt auch, unter der im §. 128. angenommenen Bedingung, daß

$$A:B = (G:c):(H:c)$$
$$(A:c):B = (G:c):H$$
$$A:(B:c) = G:(H:c)$$
$$(A:c):(B:c) = (G:c):(H:c)$$

D. i. Die Glieder eines Verhältnißes einer geometrischen Proportion oder ein Paar der gleichnamigten Glieder, oder alle Glieder derselben durch eine Größe dividirt, giebt wiederum eine geometrische Proportion.

§. 130.

Lehrsatz. Aus den Seiten zweyer Gleichungen (§. 5.) $A = B$ und $C = D$ kann eine geometrische Proportion gemacht werden, man mag die Seiten in ein Glied setzen, worein man will, wenn nur die Seiten ein und ebenderselben Gleichung nicht die mittleren oder die äußeren Glieder werden, im Fall A und C ungleiche Größen sind.

Beweis. Da $A = B$ und $C = D$ so ist
$A:B = C:D$ eine aus gleichgliedrigen Verhältnißen bestehende geometrische Proportion (§. 88.) und es ist $A:C = B:D$ (§. 116. Zus. 2) da
nun $C = D$ V. d. Bed.
so ist auch $A:D = B:C$ u. s. f.

Werden aber die Seiten einer Gleichung z. B. A und B die mittleren Glieder, so würden C, A, B und D in dieser Ordnung keine Proportion machen. Denn man setze den

den Fall, sie machten die Proportionen $C : A = B : D$ und C sey $> A$, so muß auch $B > D$ (§. 119.) und $BC > AD$ seyn (§. 42.). Da aber $B = A$ und $C = D$ so ist auch $BC = AD$ (§. 35.) welches dem vorigen widerspricht. Daher findet die Proportion $C : A = B : D$ nicht statt. Eben dis erfolgt, wenn $C < A$ folglich $B < D$. Für $A = C$ aber bleibt der erste Theil des Lehrsatzes allgemein wahr.

§. 131.

Lehrsatz. Wenn $AH = BG$
so ist $A : B = G : H$

Beweis. Wenn $AH = BG$

so ist $\frac{A}{B} = \frac{G}{H}$ (§. 63.)

Folglich $A : B = G : H$ (§. 113. Zus. 1. 4.)

§. 132.

1. Zusatz. Aus dem Beweise erhellt, daß sich aus den Faktoren dieser beyden gleichen Produkte noch verschiedene Proportionen machen laßen, und daß jede Stellung der Faktoren eine giebt, wenn man nur beobachtet, daß die Faktoren des einen Produkts entweder die mittlern oder die äußeren Glieder werden.

2. Zusatz. Es sey $fm = P = 1P$; so ist
$1 : f = m : P$
$1 : m = f : P$

D. i. Bey der Multiplikation verhält sich 1. geometrisch zu dem einen Faktor, wie der andere zum Produkt.

3. Zusatz. Es sey $D : d = Q$
Also $dQ = D = 1\,D$, so ist
$1 : d = Q : D$
$1 : Q = d : D$

D. i. Bey der Division verhält sich 1 ꝛc.

4. Zusatz Wenn $AC = B^2$
so ist $A : B = B : C$

5. Zusatz. Wenn die gleichen Produkte aus mehrern als aus zweyen Faktoren bestehen, so nehme man das Produkt einiger als einen Faktor an, und man wird auch aus solchen Produkten Proportionen machen können.

Es sey $abcd = efgh$
so ist $ab : ef = gh : cd$
$abc : ef = gh : d$ u. s. f.

§. 133.

Lehrsatz. Wenn $A : B = C : D$
und $\underline{E : F = G : H}$
so ist $AE : BF = CG : DH$

Beweis. Wenn $A : B = C : D$ so ist $AD = BC$ (§. 115.)
= $E : F = G : H$ so ist $EH = FG$ (§. 115)
Folglich $ADEH = BCFG$ (§. 35.)
daher $AE : BF = CG : DH$ (§. 132. Zus. 5.)

§. 134.

Zusatz. Wenn $A : B = C : D$; so ist auch

$$A^2 : B^2 = C^2 : D^2$$

$$A^3 : B^3 = C^3 : D^3$$

$$A^m : B^m = C^m : D^m$$

$$A^2 : B\,C = B\,C : D^2$$

$$A^{m+n} : B^m C^n = \cancel{B^n C^m} : D^{m+n}$$

und wenn $A : B = B : C$

so ist $A^2 : B^2 = AB : CB = A : C$ (§. 128.)

§. 135.

Lehrsatz. Wenn $A : B = C : D$
so ist $(A + B) : A = (C + D) : C$

Beweis. Wenn $A : B = C : D$
so ist $BC = AD$ (§. 115.)
da nun $AC = AC$
so ist $AC + BC = AD + AC$
Nun ist aber $AC + BC = (A + B) C$
und $AD + AC = (C + D) A$ } (§. 37. Z. 1.)
also ist auch $(A + B) C = (C + D) A$
Folglich $(A + B) : A = (C + D) : C$ (§. 131.)

§. 136.

1. Zusatz. Eben so kann man aus der Proportion $A : B = C : D$ folgende Wahrheiten folgern.

1. $(A + B) : B = (C + D) : D$
2. $(A - B) : A = (C - D) : C$
3. $(A - B) : B = (C - D) : D$
4. $(B - A) : A = (D - C) : C$
5. $(B - A) : B = (D - C) : D$
6. $(A + C) : C = (B + D) : D$
7. $(A + C) : A = (B + D) : B$
8. $(A - C) : C = (B - D) : D$
9. $(A - C) : A = (B - D) : B$
10. $(C - A) : A = (D - B) : B$
11. $(C - A) : C = (D - B) : D$ u. s. f.

2. Zusatz. Ferner folgt

1. $(A+B):(A-B) = (C+D):(C-D)$ (§.136.n.1.3.)
2. $(A+B):(B-A) = (C+D):(D-C)$ (§.136.n.1.5.)
3. $(A-B):(B-A) = (C-D):(D-C)$ (§.136.n.3.5.)

u. s. f.

Von den Progreßionen.

§. 137.

Erklärung. Wenn sich in einer Reihe Größen A, B, C, D, E u. s. f.

A verhält zu B wie B zu C
B = = C = C = D
C = = D = D = E u. s. f.

so machen die Größen in dieser Ordnung eine Progreßion. Sie ist arithmetisch oder geometrisch, nach dem jene Verhältniße arithmetisch oder geometrisch sind.

§. 138.

Zusatz. Jede drey auf einander folgende Größen der Progreßion

Progreßion machen eine stetige Proportion (§. 97.). Daher alle unmittelbar auf einander folgende Verhältniße gleich sind.

§. 139.

Lehrsatz. Wenn das erste Glied der arithmetischen Progreßion und der Denominator gegeben, so kann man alle Glieder der arithmetischen Proportion finden.

Beweis. Es sey das erste Glied $= a$; der Denominator $= d$ das zweite Glied $= x$, so ist

$x - a = d$ (§. 85.)

folglich $x = a + d$ (§. 24.). Es sey das dritte Glied $= y$; so ist

$a - x = x - y$ (§. 138.)

also $a - (a + d) = (a + d) - y$

folglich $y = (2a + 2d) - a$ (§. 103. Zus. 6.)

$= a + 2d$. Es sey das vierte Glied $= z$; so ist

$x - y = y - z$ (§. 138.)

also $(a + d) - (a + 2d) = (a + 2d) - z$

folglich $z = (2a + 4d) - (a + d)$ (§. 103. Zus. 6.)

$= a + 3d$; also

das nte Glied $= a + (n - 1) d$

§. 140.

1. Zusatz. Wenn also die Zahl der Glieder

I. II. III. IV. n.

so sind die ihnen zukommende Größen

a; $(a + d)$; $(a + 2d)$; $(a + 3d)$; $a + (n - 1) d$

2. Zusatz. Man kann aber auch diese arithmetische Progreßion rückwärts fortsetzen. Zu dem Ende sey wiederum von a aus rükwärts das zweyte dieser Glieder $= p$; so ist

$$p - a = a - (a + d) \quad (\S.\ 138.)$$

daher ist $$p = 2a - (a + d) \quad (\S.\ 103.\ 3.\ 6.)$$
$$= a - d.$$ Es sey

Das dritte dieser Glieder $= q$

so ist $$q - p = p - a \quad (\S.\ 138.)$$

also $$q - (a - d) = (a - d) - a$$

folglich $$q = (2a - 2d) - a \quad (\S.\ 103.\ 3.\ 6.)$$
$$= a - 2d;$$ daher

Das nte dieser Glieder $= a - (n - 1)\, d$

3. Zusatz. Ganz läßt sich also eine arithmetische Progreßion allgemein darstellen durch

$$a;\ a \mp d;\ a \mp 2d;\ a \mp 3d;\ \ldots a \mp (n-1)\, d$$

wo man entweder die obern oder die untern Zeichen nehmen kann, um eine der aus a und d entspringenden arithmetischen Progreßionen zu haben.

§. 141.

Lehrsaz. Wenn das erste Glied der geometrischen Progreßion und der Exponent gegeben, so kann man alle Glieder der geometrischen Proportion finden.

Beweis. Es sey das erste Glied $= a$; der Exponent $= e$ Das zweyte Glied $= x$; so ist

$$x : a = e \quad (\S.\ 87.)$$

folglich $$x = ae \quad (\S.\ 51.\ n.\ 4.)$$ Es sey

Das

Das dritte Glied $= y$; so ist

$$a : x = x : y \quad (\S.\ 138.)$$

also $\quad a : ae = ae : y$

folglich $\quad y = a^2e^2 : a \quad (\S.\ 116.\ Z.\ 1.)$

$$= ae^2 \quad (\S.\ 77.)$$ Es sey

Das vierte Glied $= z$ so ist

$$x : y = y : z \quad (\S.\ 138.)$$

also $\quad ae : ae^2 = ae^2 : z$

folglich $\quad z = a^2e^4 : ae \quad (\S.\ 116.\ Z.\ 1.)$

$$= ae^3;$$ also

Das nte Glied $= ae^{n-1}$

§. 142.

1 Zusatz Wenn also die Zahl der Glieder

I. II. III. IV. n,

so sind die ihnen zukommende Größen

$$a;\quad ae;\quad ae^2;\quad ae^3;\quad ae^{n-1}$$

2. Zusatz Man kann diese geometrische Progreßion aber auch rückwärts fortsetzen. Zu dem Ende sey wiederum von a aus rückwärts

das zweite dieser Glieder $= p$; so ist

$$p : a = a : ae \quad (\S.\ 138.)$$

daher ist $\quad p = a^2 : ae \quad (\S.\ 116.\ Zus.\ 3.)$

$$= \frac{a}{e};$$ Es sey

Das

das dritte dieser Glieder $= q$

so ist $\quad q : p = p : a$ (§. 138.)

also $\quad q : \frac{a}{e} = \frac{a}{e} : a$

und $\quad qe : a = a : ae$ (§. 126.)

folglich $\quad qe = a^2 : ae$ (§. 116. Zus. 3.)

daher $\quad q = a^2 : ae^2$ (§. 70.)

$\quad = \frac{a}{e^2}$ (§. 64. c) daher

das n^{te} dieser Glieder $= \frac{a}{e^{n-1}}$

3. Zusaz. Zusammen in einer Reihe laßen sich alsogeometrische Progreßionen, deren erstes Glied $= a$, deren Exponent $= e$ allgemein darstellen durch

$$\frac{a}{e^{n-1}} \cdots \frac{a}{e^2}; \; \frac{a}{e}; \; a; \; ae; \; ae^2 \cdots ae^{n-1}$$

wo man von a aus die Glieder rechts oder links nehmen kann, um eine der aus a und e entspringenden geometrischen Progreßionen zu haben.

Ende
der allgemeinen Mathematik.

Druckfehler.

Seite	7	Zeile	10	von unten	$>$	statt	$=$
—	34	—	3	———	q^r	statt	p^r
—	34	—	2	———	q^6	statt	p^6
—	36	—	3	———	$\frac{a}{e^m}$	statt	$\frac{a^m}{e}$

KODAK GRAY SCALE

C	Red-Filter Negative	Cyan Printer	M	Green-Filter Negative	Magenta Printer	Y	Blue-Filter Negative	Yellow Printer

.00 A .10 .20 .30 .50 .70 M 1.00 1.30 1.60 B 1.90

black	3-color	white	cyan	violet	magenta	primary red	yellow	green

KODAK COLOR CONTROL PATCHES

These colors have been selected as representative of those inks commonly used in photomechanical reproduction.